Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas IV (MA2115)
Abr-Jul 2025
2do Examen Parcial (35 %)

SOLUCIÓN

Pregunta 1. (6 ptos.) Considere la familia de curvas

$$\mathcal{F} = \left\{ \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2\,y^2 \ln(y) - y^2 + 2\,x^2 = \lambda \right\} \ : \ \lambda \in (-1, \infty) \right\}$$

i. Halle la ecuación diferencial que describe a la familia $\mathcal{F}$;

ii. Determine las trayectorias ortogonales de la famila $\mathcal{F}$.

Solución: Derivando ímplicitamente la ecuación de una curva cualquiera perteneciente a la familia $\mathcal{F}$, se tiene

$$2\left(2\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ln(y) + y^2\,\frac{1}{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - 2\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4\,x = 0$$

de donde se desprende que la ecuación diferencial que describe a las curvas pertenecientes a la familia $\mathcal{F}$ es

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y\ln(y)}$$

Luego, las trayectorias ortogonales de la familia $\mathcal{F}$ vienen dadas por las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\ln(y)}{x}$$

la cual resolvemos mediante separación de variables como sigue.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\ln(y)}{x} \quad &\iff \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln(y)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\iff \quad \ln\big|\ln(y)\big| = \ln|x| + \kappa \\
&\iff \quad \ln(y) = e^{\ln|x|+\kappa} = e^{\kappa}\,e^{\ln|x|} = e^{\kappa}\,|x| = c\,x \\
&\iff \quad y = e^{c\,x}
\end{aligned}$$

Así, la familia de trayectorias ortogonales a $\mathcal{F}$ es

$$\left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=e^{c\,x}\right\}\ :\ c\in\mathbb{R}\right\}$$

Pregunta 2. (9 ptos.) Resuelva el problema de valor inicial

$$6\,y^2\,\mathrm{d}x-x\big(2x^3+y\big)\mathrm{d}y=0\quad\text{con}\quad y(-1)=3$$

Solución: Como la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{6\,y^2}{x\big(2x^3+y\big)}$$

no es ni de variables separables, ni lineal, ni homogénea, consideremos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x\big(2x^3+y\big)}{6\,y^2}=\frac{1}{3\,y^2}\,x^4+\frac{1}{6\,y}\,x$$

la cual identificamos como una ecuación de Bernoulli. Notemos que $y\equiv 0$ es solución de la ecuación original. Dado que las funciones

$$f(x,y)=\frac{x\big(2x^3+y\big)}{6\,y^2}\qquad\text{y}\qquad\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{6\,y}$$

son continuas en el semiplano superior, $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y>0\big\}$, y el punto $(-1,3)$ pertenece al semiplano superior, el Teorema de Existencia y Unicidad establece que existe un intervalo $I\subset(0,\infty)$ centrado en 3 y una única función $x=\varphi(y)$ derivable en I que satisface el problema de valor inicial $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f(x,y)$ con $x(3)=-1$, para todo $y\in I$. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{3\,y^2}\,x^4+\frac{1}{6\,y}\,x \iff{}& \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{6\,y}\,x=\frac{1}{3\,y^2}\,x^4\\
\overset{\substack{x\not\equiv 0\\ \downarrow}}{\iff}{}& x^{-4}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{6\,y}\,x^{-3}=\frac{1}{3\,y^2}\\
\iff{}& -3\,x^{-4}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2\,y}\,x^{-3}=-\frac{1}{y^2}
\end{aligned}$$

$$w = x^{-3} \;\Rightarrow\; \tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = -3\,x^{-4}\,\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$\overset{\downarrow}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2\,y}\,w = -\frac{1}{y^2}$$

y esta última ecuación se puede resolver mediante factor integrante. Notemos que $x \equiv 0$ es solución de la ecuación original. Luego,

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\mathrm{d}y}{2y}} = e^{\frac{1}{2}\ln|y|} \overset{\substack{y \in I \subset (0,\infty) \\ \downarrow}}{=} e^{\frac{1}{2}\ln(y)} = e^{\ln\left(\sqrt{y}\right)} = \sqrt{y}$$

por lo que la solución viene dada por

$$\begin{aligned} w(y) &= \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\int \sqrt{y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y + c\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}}\left(-\int y^{-3/2}\,\mathrm{d}y + c\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}}\left(-\frac{1}{-1/2}\,y^{-1/2} + c\right) = \frac{2}{y} + \frac{c}{\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Reemplazando $w = x^{-3}$ tenemos que la solución es

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{w}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{2}{y} + \dfrac{c}{\sqrt{y}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{2 + c\,\sqrt{y}}{y}}} = \sqrt[3]{\frac{y}{2 + c\,\sqrt{y}}}$$

donde el valor de c viene determinado por la condición incicial

$$c = \left.\frac{y - 2\,x^3}{x^3\,\sqrt{y}}\right|_{(x,y)=(-1,3)} = \frac{3 - 2\,(-1)^3}{(-1)^3\,\sqrt{3}} = \frac{-5}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, la solución al problema de valor indicial es

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{2 - \dfrac{5}{\sqrt{3}}\,\sqrt{y}}} \qquad \text{, para } \; y > \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

la cual podemos dar implícitamente con la ecuación

$$\frac{5}{\sqrt{3}}\,x^3\,\sqrt{y} = 2x^3 - y \qquad \text{, con } \; x < 0$$

Pregunta 3. (8 ptos.) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Solución:

$$y = z\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,x + z$$

$$\begin{aligned}
x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x^2 - y^2} + y \quad &\overset{\downarrow}{\Longleftrightarrow} \quad x\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,x + z\right) = \sqrt{x^2 - (xz)^2} + zx \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{|x|\,\sqrt{1 - z^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{|x|} \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{|x|} \\
&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{arcsen}(z) = \frac{x}{|x|}\Big(\ln|x| + c\Big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{y}{x} = z = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{|x|}\Big(\ln|x| + c\Big)\right) \\
&\qquad\qquad\;\; \underset{\uparrow}{=} \frac{x}{|x|}\operatorname{sen}\Big(\ln|x| + c\Big)
\end{aligned}$$

seno es impar: $\operatorname{sen}(\pm\,\theta) = \pm\operatorname{sen}(\theta)$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{|x|}\operatorname{sen}\Big(\ln|x| + c\Big) \\
&\qquad\quad\; = |x|\operatorname{sen}\Big(\ln|x| + c\Big)
\end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación diferencial viene dada por

$$y = |x|\operatorname{sen}\Big(\ln|x| + c\Big)$$

con c tomando valores en $\mathbb{R}$.

Pregunta 4. (6 ptos.) Trace las curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x + y + 1}{x + y - 3}$$

Solución: Dado que las rectas $-x+y+1=0$ y $x+y-3=0$ se intersectan en el punto $(2,1)$, pues

$$\begin{cases} -x+y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-(x-2)+(y-1)}{(x-2)+(y-1)}$$

la cual es homogénea en las variables $u=(x-2)$ y $v=(y-1)$ ya que

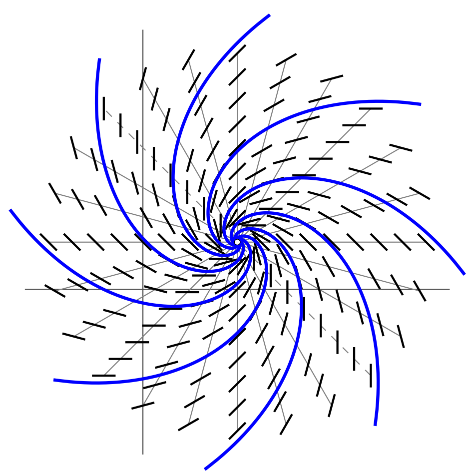
$$\frac{-(x-2)+(y-1)}{(x-2)+(y-1)} = \frac{-\lambda\,(x-2)+\lambda\,(y-1)}{\lambda\,(x-2)+\lambda\,(y-1)}$$

para todo $\lambda \neq 0$. Como consecuencia, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ es constante sobre cada recta que pasa por el punto $(2,1)$ excluyendo ese punto. Como

$$k = \frac{-(x-2)+(y-1)}{(x-2)+(y-1)} \iff y-1 = \frac{1+k}{1-k}\,(x-2)$$

escribiendo $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k$ se tiene que las isoclinas son rectas que pasan por el punto $(2,1)$, sin incluirlo, de pendiente $\dfrac{1+k}{1-k}$, con $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Más aún, si representamos las isoclinas como $y-1 = m\,(x-2)$ entonces $k = \dfrac{m-1}{m+1}$, con $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

En la ilustración que está a la derecha, hemos usado las isoclinas para marcar el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial dada y así poder trazar sus curvas integrales.



Pregunta 5. (6 ptos.) Considere el problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x + y - 1)\, e^x \quad \text{con} \quad y(1) = 1$$

Halle las primeras tres funciones, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$, que se obtienen en el método de aproximaciones sucesivas de Picard.

Solución: Las funciones $\{\varphi_n\}$ en el método de aproximaciones de Picard vienen dadas por

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi_n(t)\big)\, \mathrm{d}t \qquad \text{, con } \varphi_0 \equiv y_0$$

donde $f(x,y)$ proviene de la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ y los valores (x_0, y_0) de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Considerando $f(x,y) = (x + y - 1)\, e^x$ se tiene que

$$f\big(t, \varphi_n(t)\big) = \big(t + \varphi_n(t) - 1\big)\, e^t$$

Así, para la condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$ calculamos:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1 \\
\varphi_1(x) &= 1 + \int_1^x \big(t + \varphi_0(t) - 1\big)\, e^t\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_1^x t\, e^t\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + (x-1)\, e^x \\
\varphi_2(x) &= 1 + \int_1^x \big(t + \varphi_1(t) - 1\big)\, e^t\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_1^x \big(t + (t-1)\, e^t\big)\, e^t\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_1^x t\, e^t\, \mathrm{d}t + \frac{e^2}{4} \int_1^x 2\,(t-1)\, e^{2(t-1)}\, 2\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_1^x t\, e^t\, \mathrm{d}t + \frac{e^2}{4} \int_0^{2(x-1)} u\, e^u\, \mathrm{d}u \\
&= 1 + (x-1)\, e^x + \frac{e^2}{4}\big(1 + (2x-3)\, e^{2(x-1)}\big)
\end{aligned}$$

recordando que $\int_a^b t\, e^t\, \mathrm{d}t = t\, e^t \Big|_a^b - \int_a^b e^t\, \mathrm{d}t = (t-1)\, e^t \Big|_a^b$